

# 数理生物学演習

第10回 空間構造の数理モデル（1）：  
人工生命

1

第10回 空間構造の数理モデル（1）：  
人工生命

本日の目標

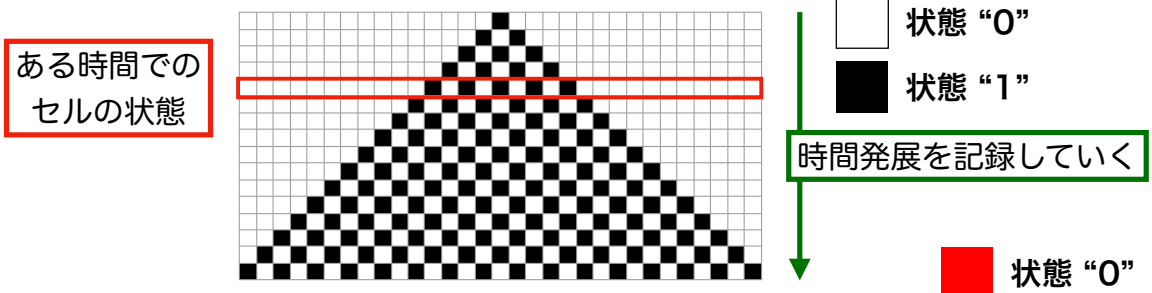
- セル・オートマトン
- ライフゲーム

2

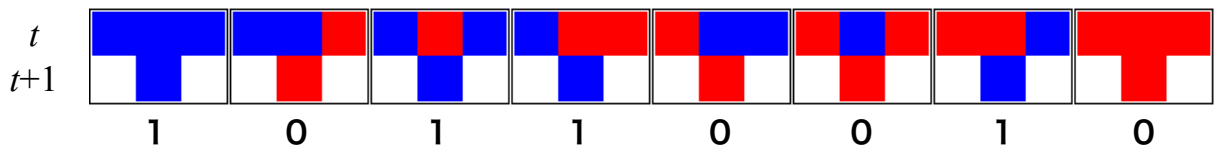
# 1次元セル・オートマトン

仮定

- セルが1次元的に並んでいる
- セルは状態“0”または“1”のいずれかをもつ
- セルは自身と近傍の状態により次のステップでの状態が決まる



遷移ルール（2近傍）



$$1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 178$$

ルール178 <sub>3</sub>

## ウルフラムのクラス

Wolfram (1983) *Rev. Mod. Phys.*

クラス1

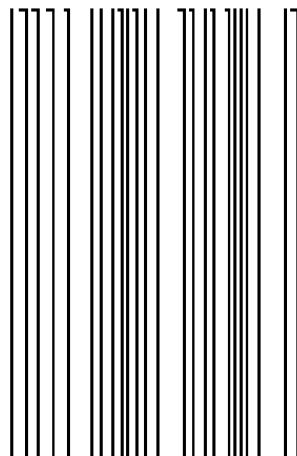
セルの状態がすべて同じになり、変化が起こらない。



平衡点

クラス2

安定したパターンに落ち着き変化が周期的になる。



リミットサイクル

クラス4

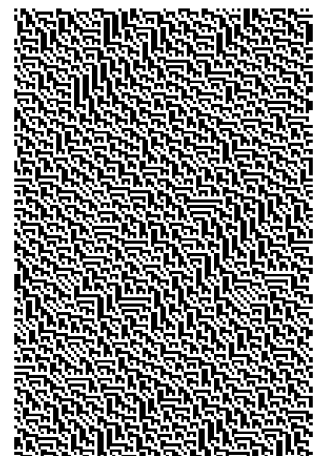
あるときは規則的なパターンを示し、あるときはランダムに振る舞う。



複雑系

クラス3

全体がランダムに振る舞う。ただし、決定論的。



カオス

秩序  
安定



無秩序  
不安定

クラス4で“複雑さ”が最大になる生命現象はここにあるのかも？

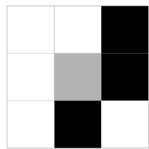
# ライフゲーム Conway's Game of Life

仮定

- 各セルは状態“生”と“死”をもつ
- 誕生, 生存, 死亡のプロセスを経て, “生”と“死”の状態を更新する
- 8近傍のセルの状態により次の状態がきまる
- 遷移ルールは誕生, 維持, 過疎, 過密の4つ

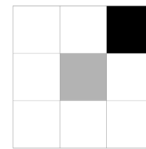
2次元のセル・オートマトンの特殊な場合. かなり色々なパターンが観察できる.

誕生



8近傍中  
ちょうど3つが“生”ならば  
次のステップで“生”

過疎



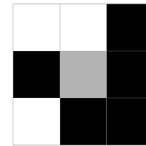
8近傍中  
“生”が1つ以下ならば  
次のステップで“死”

維持



8近傍中  
ちょうど2つが“生”ならば  
次のステップで更新なし  
 (“生”ならば“生”, “死”ならば“死”)

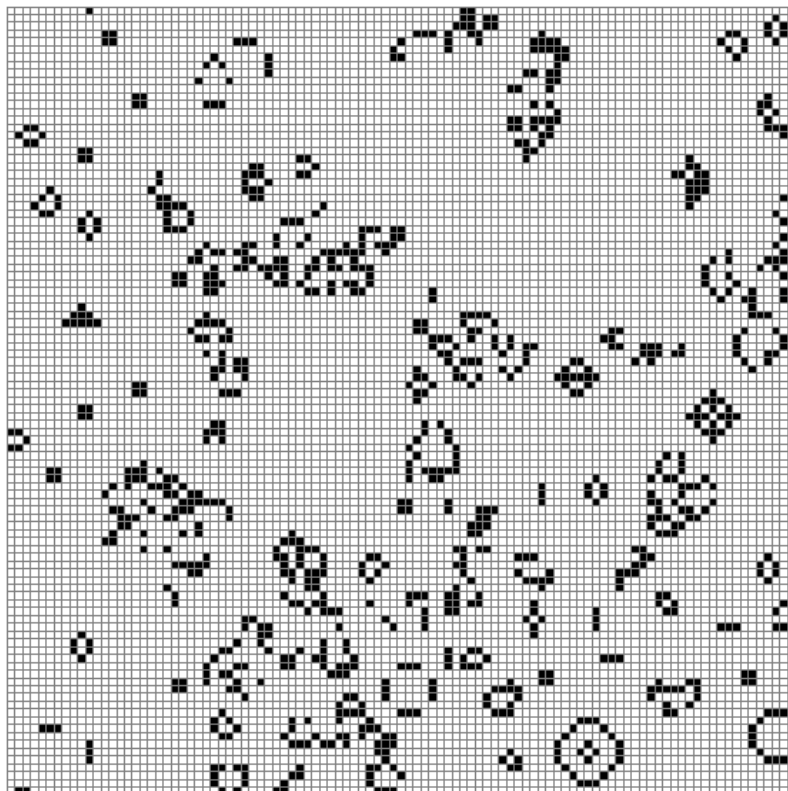
過密



8近傍中  
“生”が4つ以上ならば  
次のステップで“死”

5

## ライフゲームの実行例



様々なパターンが生成・消失していく. 生命のアナロジー?

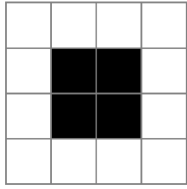
6

# ライフゲームにみられるパターンいろいろ (1)

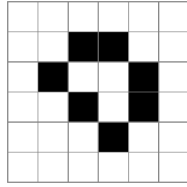
## 固定物体 still life

全く変化しない

ブロック block



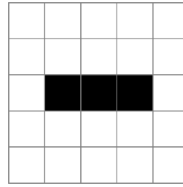
パン loaf



## 振動子 oscillator

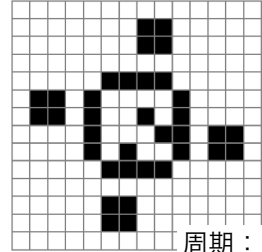
あるパターンを決まった周期で繰り返す  
(特定の世代後には同じパターンに戻る)

ブリンカー blinker



周期：2

回転花火 pinwheel

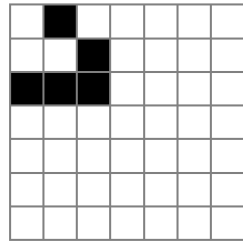
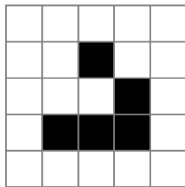


周期：4

## 移動物体 spaceship

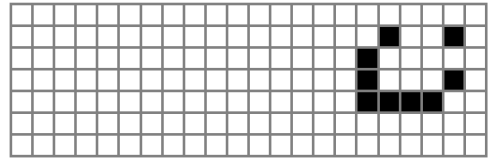
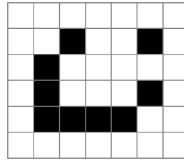
あるパターンを決まった周期で繰り返すが、少なくとも1セル以上移動している。

グライダー glider



Lightweight spaceship

最も高速 ( $c/2$ ) な移動物体の一つ



$c$ は (CAにおける) 光速 (1世代あたりの情報伝播の上限)<sub>7</sub>

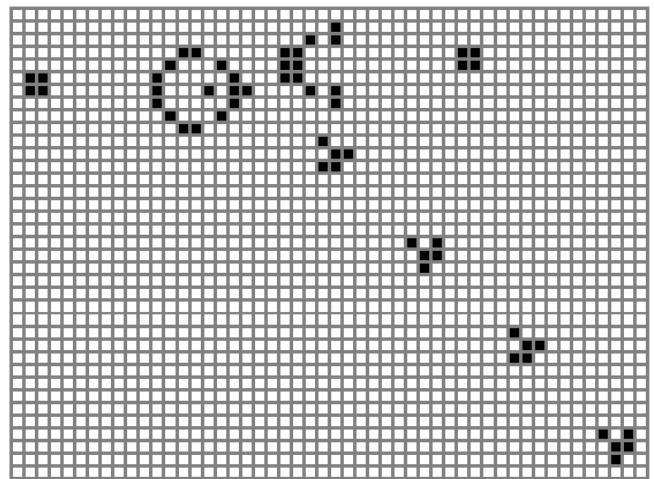
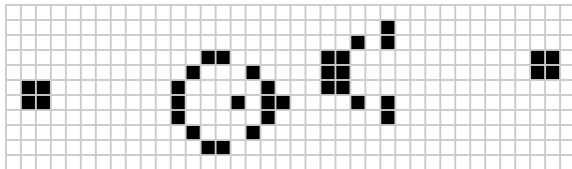
# ライフゲームにみられるパターンいろいろ (2)

## 繁殖型

### 銃 gun

移動物体を発射し続ける安定的 (周期的) なパターン

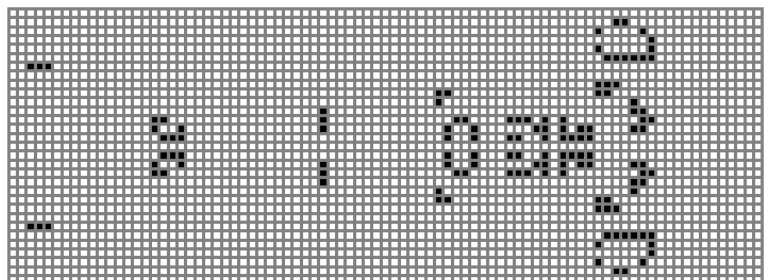
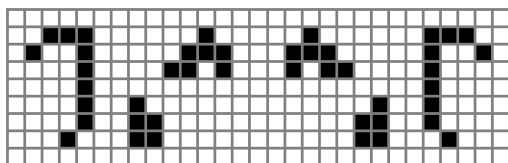
Gosperグライダー銃



### シュシュポツポ列車 puffer

固定物体や振動子などの  
“デブリ”を残しながら移動する

Puffer 1

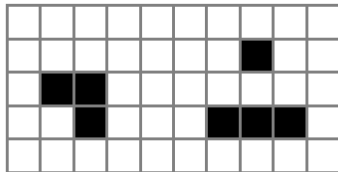


# ライフゲームにみられるパターンいろいろ (3)

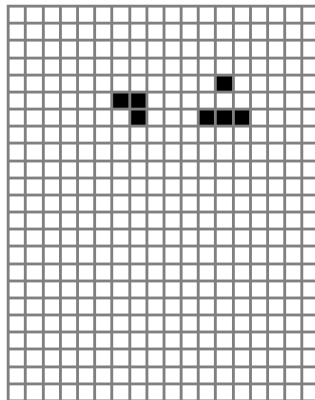
## その他の特徴的なパターン

### 長寿 Methuselah

安定化 (消失, 固定, 周期など)  
するまでに長い世代を要する  
ダイハード



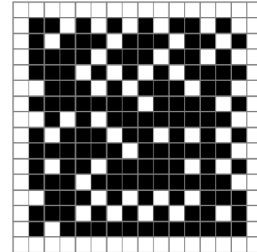
130世代後に消失



### エデンの園配置 Garden of Eden

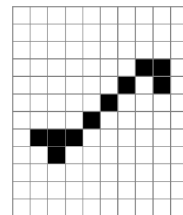
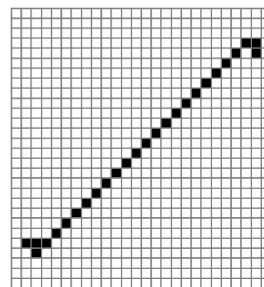
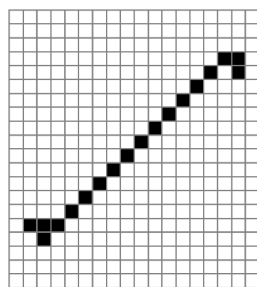
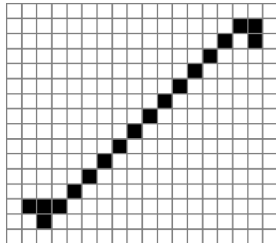
他のどのパターンからも生成できない  
(最初にそのように配置されなければ存在し得ない)

### Garden of Eden 2



**導火線 wick/fuse** 安定的 (固定/周期) で線的な構造を持ち, 一方の端から“火をつける”ことができる

### パン屋 baker



長くしたり, 短くしたりも  
OK

もっといろいろなパターンを知りたい人はLifeWiki <http://www.conwaylife.com/wiki> を見てみよう。

## セルオートマトンと自己複製

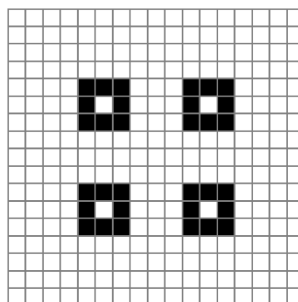
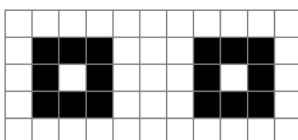
**複製子 replicator**が備えるであろう性質 フォン・ノイマンの万能組立機

- ・ 設計図のとしての側面: 次世代に受け渡し可能な自身の組み立て方を示したデータ
- ・ 組立機としての側面: 設計図に基づき次世代を組み立てることができるアルゴリズム

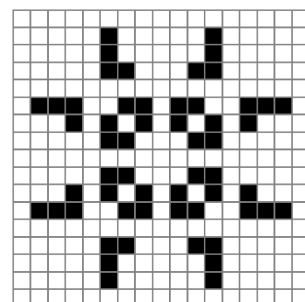
### Conway's Game of Lifeにみられる自己複製 (?)

#### pre-pulsar

15世代後に自身のコピーを作るが,  
その後パルサーに移行してしまい, そ  
れ以上の増殖ができない



15世代後



パルサーは周期3の振動子

### 線形伝播子 linear propagator

2013年に見つかったConway's Game of Life上で (おそらく) 初の広義の自己増殖するパターン。  
狭義には自己増殖は2つ以上の自身のコピーを生成するものを指すが, このパターンは自身のコピーを一つ  
だけ残す。Pufferの仲間。14826990セルx14826908セルとめちゃくちゃでかいので可視化が難しい。

[http://www.conwaylife.com/wiki/Linear\\_propagator](http://www.conwaylife.com/wiki/Linear_propagator)

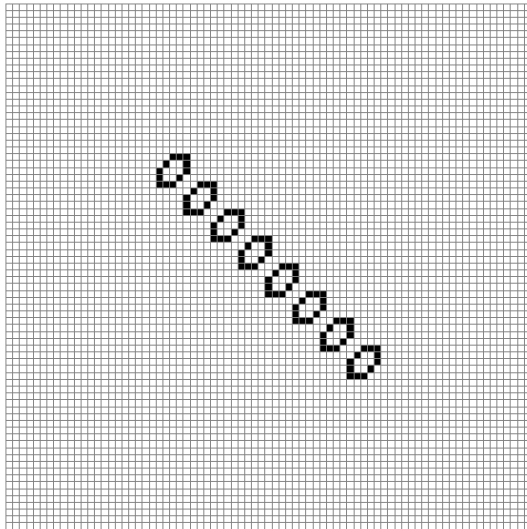
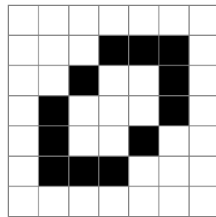
# その他のルールに見られる自己複製するパターン

## HighLife

8近傍中3 or 6で誕生, 2で維持

### Replicator

12( $2^n - 1$ )世代で $2^n$ 個体に増える

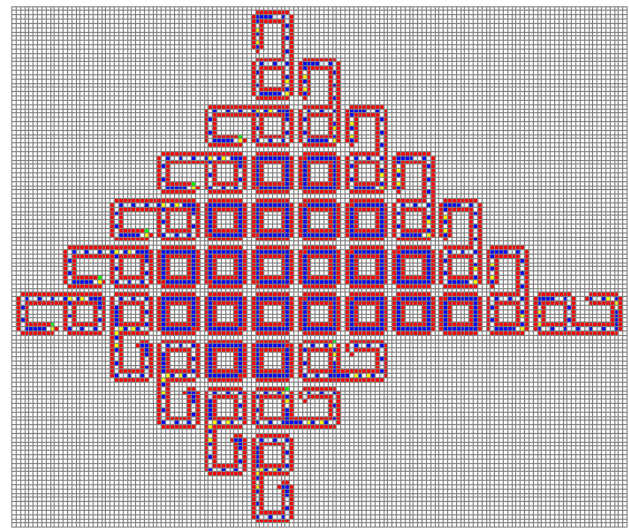
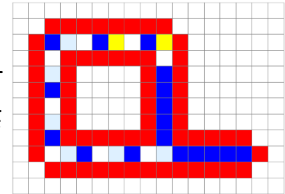


## Langton's Loops

8状態, 遷移ルールの詳細は

Langton (1984) *Physica D* 参照

151世代でコピーを作る  
増殖に伴いコロニーを形成するが内部は増殖できず固定され, 表面のみ成長を続ける



実際にプログラムを組んでみよう！

## NumPyでの行列計算の復習（1）：第7回から一部抜粋

NumPyのndarray（配列）をベクトルや行列と見立てて計算する

- ・ 1次元配列 → ベクトル
- ・ 2次元配列 → 行列

```
# ndarray
import numpy as np

# ndarrayの定義
a = np.array([1,2,3])
b = np.array([6, 3.3, 1])
C = np.array([[1, 5, 6],
              [7, 8, 9],
              [4, 2, 3]])
D = np.array([[2.3, 4, 7.2],
              [7, 9, 1],
              [11, 2, 9]])
```

```
# ベクトル・行列計算

## ベクトルの基本演算
print("a+b: ", a + b) a + b
print("a-b: ", a - b)
print("3*a: ", 3 * a) 3a

## ベクトルの内積・外積
print("a.b, np.dot(a,b): ", np.dot(a,b)) a · b
print("axb, np.cross(a,b): ", np.cross(a,b)) a × b

## 行列の基本演算
print("C+D: \n", C + D)
print("C-D: \n", C - D) C - D
print("2*C: \n", 2 * C) 2C

## 行列の乗算
print("C.a, np.dot(C,a): ", np.dot(C,a)) Ca
print("C.D, np.dot(C,D): \n", np.dot(C,D)) CD
print("D.C, np.dot(D,C): \n", np.dot(D,C)) DC
```

$$\mathbf{a} = (1,2,3) \quad \mathbf{b} = (6,3.3,1) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2.3 & 4 & 7.2 \\ 7 & 9 & 1 \\ 11 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

13

## NumPyでの行列計算の復習（2）：第7回から一部抜粋

NumPyのndarray（配列）をベクトルや行列と見立てて計算する

- ・ 1次元配列 → ベクトル
- ・ 2次元配列 → 行列

$$\mathbf{a} = (1,2,3) \quad \mathbf{b} = (6,3.3,1) \quad \mathbf{e} = (1.0,2.0,3.0) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2.3 & 4 & 7.2 \\ 7 & 9 & 1 \\ 11 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \\ 11 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

```
# 線形代数向け関数
# 転置行列
print("C^T, C.transpose(): ", C.transpose()) CT
print("C^T, np.transpose(C): ", np.transpose(C))
# 行列式
print("|D|, np.linalg.det(D): ", np.linalg.det(D)) |D|
# 逆行列
print("F^-1, np.linalg.inv(F): ", np.linalg.inv(F)) F-1
# 固有値・固有ベクトル
print("np.linalg.eig(C): ", np.linalg.eig(C))
print("固有値のみ, np.linalg.eigvals(C): ", np.linalg.eigvals(C))
```

固有値：  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$   
固有ベクトル：  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$

14

# NumPyの配列操作：インデックス，スライス（1）

インデックスやスライスをもちいて要素や配列の集まりへのアクセスができるのはリストと同様だが，より高機能なアクセスが可能

```
# 01-01. 配列
import numpy as np

a = np.array([1,2,3])
b = np.array([6, 3.3, 1])
C = np.array([[1, 5, 6],
              [7, 8, 9],
              [4, 2, 3]])
D = np.array([[2.3, 4, 7.2],
              [7, 9, 1],
              [11, 2, 9]])
```

$$\mathbf{a} = (1,2,3) \quad \mathbf{b} = (6,3.3,1) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2.3 & 4 & 7.2 \\ 7 & 9 & 1 \\ 11 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

```
# 01-02. インデックスの基礎
print(a[0])
print("aの末尾からのカウント：", a[-1])
print("2次元 列へのアクセス：", C[0])
print("2次元 要素へのアクセス", C[0,1])
```

```
# 出力
1
aの末尾からのカウント： 3
2次元 行へのアクセス： [1 5 6]
2次元 要素へのアクセス 5
```

```
# 01-03. スライスの基礎
print("0~(2-1)まで1ステップ刻み：", b[0:2:1])
print("2次元 0~(2-1)まで1ステップ刻み 列： \n", D[0:2])
print("2次元 0~(2-1)まで1ステップ刻み 行と列両方： \n", D[0:2,0:2])
```

```
# 出力
0~(2-1)まで1ステップ刻み： [6. 3.3]
2次元 0~(2-1)まで1ステップ刻み 列：
[[2.3 4. 7.2]
 [7. 9. 1. ]]
2次元 0~(2-1)まで1ステップ刻み 行と列両方：
[[2.3 4. ]
 [7. 9. ]]
```

15

# NumPyの配列操作：インデックス，スライス（2）

インデックスやスライスをもちいて要素や配列の集まりへのアクセスができるのはリストと同様だが，より高機能なアクセスが可能

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cの要素や行，列を取り出してみよう

```
# 01-04. リストを使った行列の一部へのアクセス
print("0,1行と0,1列： \n", C[[0,1]][:,[0,1]])
```

```
# 出力
0,1行と0,1
列：
[[1 5]
 [7 8]]
```

```
# 01-05. インデックスとスライスの組み合わせ
print("2次元 列へのアクセス：", C[:,0])
```

```
# 出力
2次元 列へのアクセス： [1 7 4]
```

```
# 01-06. リストを使ったインデックスアクセス
print("0,1行： \n", C[[0,1]])
print("0,1列： \n", C[:,[0,1]])
```

```
# 出力
0,1行：
[[1 5 6]
 [7 8 9]]
0,1列：
[[1 5]
 [7 8]
 [4 2]]
```

ライフゲームのプログラミングの際にも利用してみよう！

16

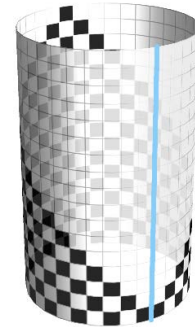
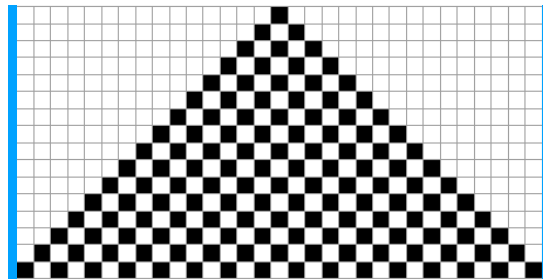


# 境界条件

プログラムを組むときも、この部分の処理は注意！

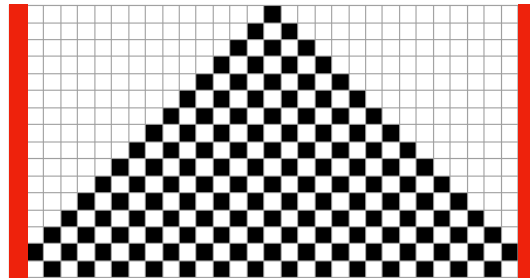
## 周期境界条件

“端”同士が張り合わされていると考える。



## 固定端

“端”の値を与えて、変動しないとする。

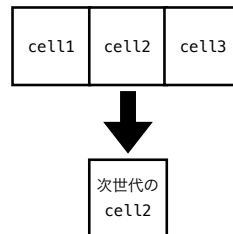


例えば、この端で常に状態“0”

17

## # 02-01. ルール178を実装してみよう

```
# 02-01-01. ルール178
def rule178(cell1, cell2, cell3):
    if cell1 == 0:
        if cell2 == 0:
            if cell3 == 0:
                return 0
            elif cell3 == 1:
                return 1
        elif cell2 == 1:
            if cell3 == 0:
                return 0
            elif cell3 == 1:
                return 0
    elif cell1 == 1:
        if cell2 == 0:
            if cell3 == 0:
                return 1
            elif cell3 == 1:
                return 1
        elif cell2 == 1:
            if cell3 == 0:
                return 0
            elif cell3 == 1:
                return 1
```



自身とその両近傍の状態に応じ、次世代の状態が決まる

■ 状態“0”  
■ 状態“1”

### ルール178



```
# 確認
for cell1 in range(2):
    for cell2 in range(2):
        for cell3 in range(2):
            print(cell1, cell2, cell3, ":", rule178(cell1, cell2, cell3))
```

```
000: 0
001: 1
010: 0
011: 0
100: 1
101: 1
110: 0
111: 1
```

あまり賢いルールの定義の仕方ではない。  
余裕のある人はもっと良い実装方法を考えてみよう。

18

## # 02-01. ルール178を実装してみよう



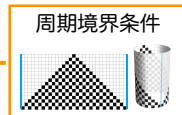
■ 状態“0”  
■ 状態“1”

```
# 02-01-02. セルオートマトンの実行
# パッケージの読み込み等
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

num_cell = 100 # セルの数
steps = 50 # 何ステップまで計算するか

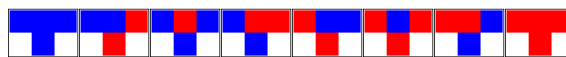
cell_list = [] # 各世代のセルの情報を記録するリスト
cell = np.zeros(num_cell, dtype=int) # セルの初期化

cell[int(num_cell/2)] = 1 # 一つのセルだけに1を代入
cell_list.append(cell)
for t in range(steps):
    # -- 状態遷移 --
    cell_tmp = np.ones(num_cell, dtype=int) # 次世代の情報を一時的に記録するセル
    # 境界条件処理その1
    cell_tmp[0] = rule178(cell[num_cell-1], cell[0], cell[1])
    # メイン
    for i in range(1, num_cell-1, 1):
        cell_tmp[i] = rule178(cell[i-1], cell[i], cell[i+1]);
    # 境界条件処理その2
    cell_tmp[num_cell-1] = rule178(cell[num_cell-2], cell[num_cell-1], cell[0])
    # 情報の更新
    cell = np.copy(cell_tmp)
    cell_list.append(cell)
```



19

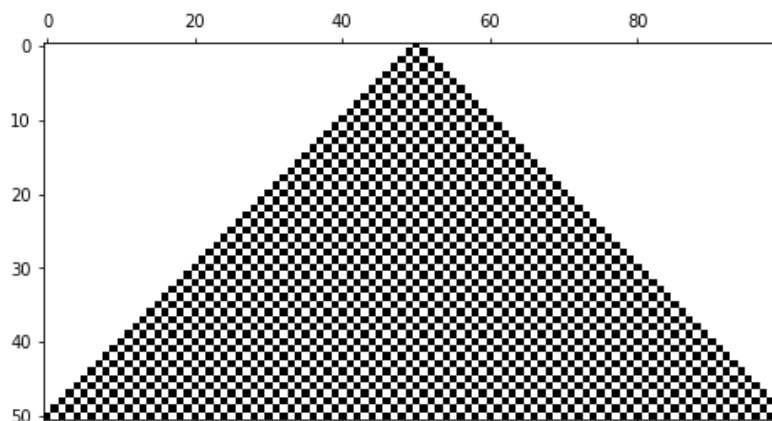
## # 02-01. ルール178を実装してみよう



■ 状態“0”  
■ 状態“1”

### # 02-01-03. セルオートマトンの可視化

```
plt.figure(dpi=300)
plt.matshow(cell_list[:, :])
```

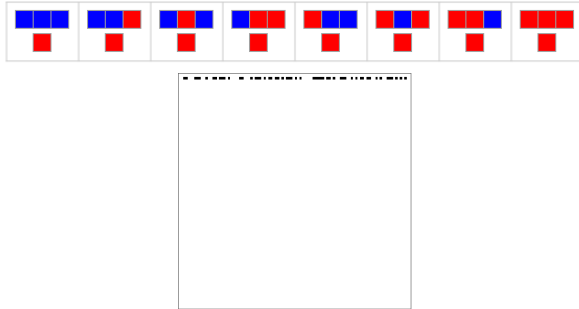


- matplotlib.pyplot
  - matshow(リストや配列)  
リストや配列の可視化

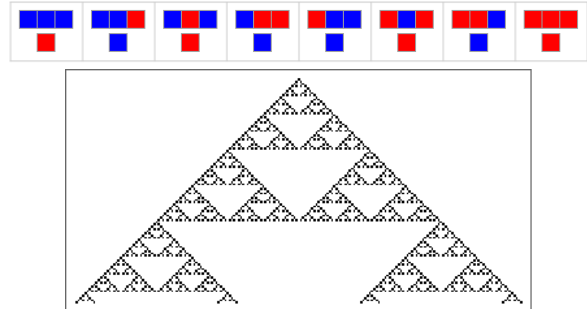
20

# 02-02  
別のルールを実装してみよう

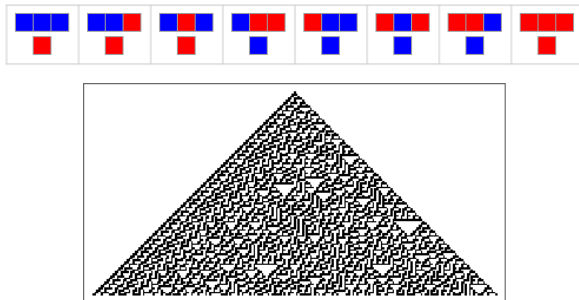
ルール0 (クラス1)



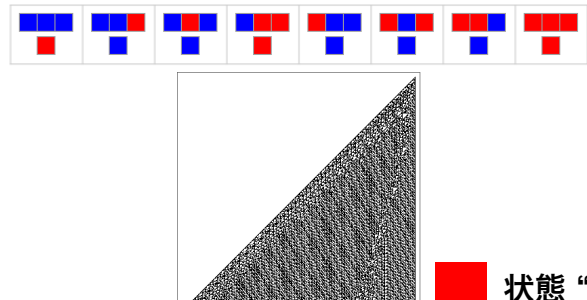
ルール90 (クラス2)



ルール30 (クラス3)



ルール110 (クラス4)



興味のある人は4近傍へもチャレンジしてみよう

■ 状態“0”  
■ 状態“1”<sub>21</sub>

## ライフゲーム

# 03.  
ライフゲームのプログラムを組んでみてください。

- 境界条件は周期または固定のいずれか好きな方を採用して良い (ただし固定端の場合は境界はすべて“死”)
- 格子のサイズは50×50で作る (もっと大きくしても良い)

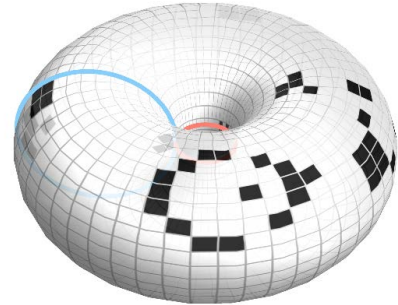
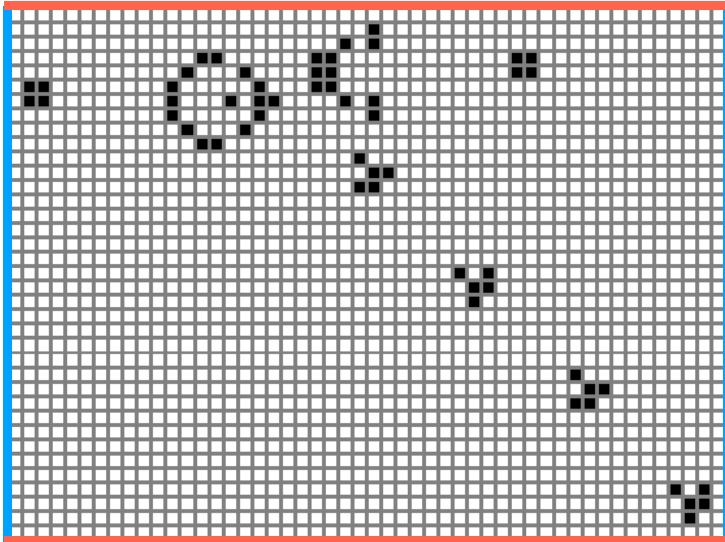
やるべきこと

- 初期条件の設定
- 状態遷移ルールの実装
- 境界条件の処理
- 結果の記録
- データの可視化

# 境界条件 2次元 (1)

## 周期境界条件

“端”同士が張り合わされていると考える。



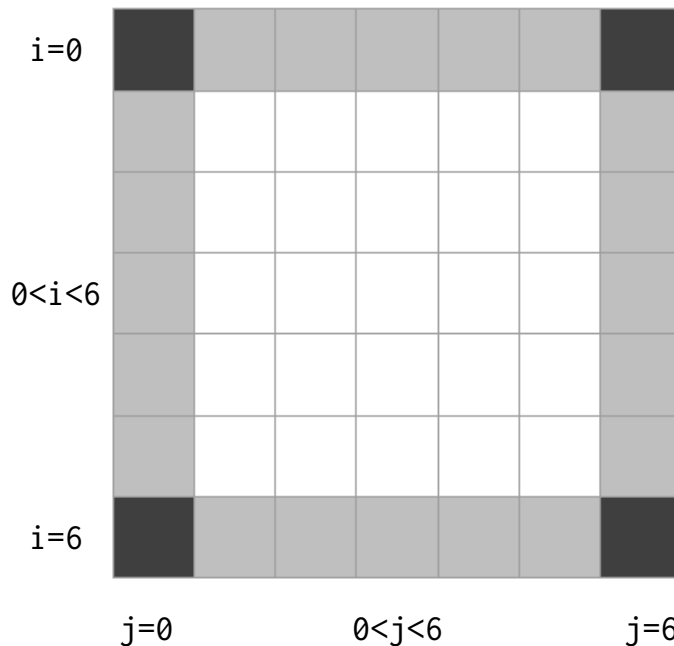
2次元の場合の単純な周期境界条件はトラス状の構造を考えていることになる

固定端は2次元でも平面のままなので省略。

23

# 境界条件 2次元 (2)

$n_i=7, n_j=7$   
の場合



ライフゲームの場合、次世代の“状態”はそのセル自身と8近傍（Moore近傍）に依存する。  
そのため、境界条件の処理は上図のように8つ考えればよい。  
(結果的に処理は境界条件処理8つ+メイン1つの計9つに分岐する。)

24

## ライフゲーム 作成方針の例（1）：遷移ルールの定義

擬似的なコードを提示しているので、参考にして自分でプログラムを組もう。

```
# 03-01. ライフゲーム遷移ルール
def 遷移ルール(3x3の配列 (注目するセルとその8近傍)) :
    近傍の“生” (1) のセルの数を計算する (np.sumを使ってみよう)

    近傍の“生”のセルがちょうど2つならば:
        次世代の (中心の) セルの状態は更新なし
    (2ではなく) 近傍の“生”のセルがちょうど3つならば:
        次世代の (中心の) セルの状態は“生”
    それ以外の場合 (過疎, 過密) :
        次世代の (中心の) セルの状態は“死”

    return 次世代の (中心の) セルの状態
```

どうやって場の全体から部分的な3x3の配列を取ってくるか？

→ インデックス, スライスを活用

ここに挙げているのはあくまで一例, 自分がやりやすい方法で実装してOK.

25

## ライフゲーム 作成方針の例（2）：実行部分

```
# 03-02. ライフゲームの実行
# 初期条件の設定
場のサイズを設定 (縦, 横にそれぞれ何個セルが配置されるか?)
何世代目まで計算するか?
場を記録するリストの準備
場の初期値の設定 (例. ランダム, 特定パタンの配置など)

for 世代:
    # 状態遷移
    次世代の場を記録する配列の用意

    for i in 場のサイズ (縦) :
        for j in 場のサイズ (横) :
            # 境界条件等による分岐
            # 全部で9通り (メイン+境界条件)
            # 周期境界条件を採用した場合
            もし i==0ならば:
                もし j==0ならば:
                    次世代の場[i, j] = 遷移ルール(場[[-1, 0, 1], :][:, [-1, 0, 1]])
                (j==0でなく) もし 0<j<場のサイズ (横) -1ならば:
                    次世代の場[i, j] = 遷移ルール(場[[-1, 0, 1], :][:, [j-1, j, j+1]])
                (j<場のサイズ (横) -1でなく) もし j==場のサイズ (横) -1ならば:
                    ...
            (i==0でなく) もし 0<i<場のサイズ (縦) -1ならば:
                ...
            (i<場のサイズ (縦) -1でなく) もし i==場のサイズ (縦) -1ならば:
                ...

    場の更新 (次世代を現世代にコピー, np.copyを使ってみよう)
    場の記録 (リストへ追加)
```

ここに挙げているのはあくまで一例, 自分がやりやすい方法で実装してOK.

26

# ライフゲーム 作成方針の例（3）：可視化1

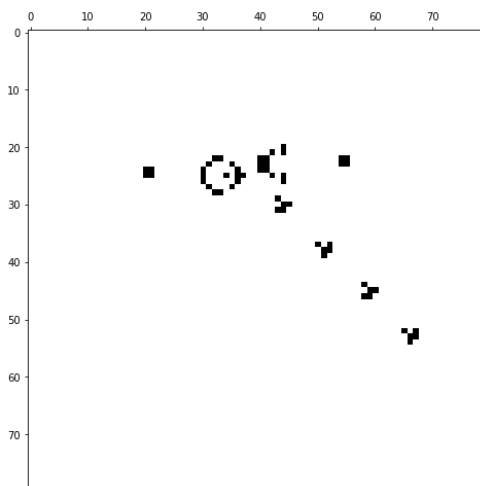
ここではfield\_listにライフゲームの結果が保存されているとする  
field\_listは各ステップでの状態を記録した配列のリストとする

## 特定の世代をプロット

# 03-03. セルオートマトンの可視化

```
plt.figure(figsize=(8,8))  
plt.matshow(field_list[50], fignum=1, cmap="binary")
```

field\_list[50]に記録された場の配列をプロット



27

# ライフゲーム 作成方針の例（4）：可視化2

ここではfield\_listにライフゲームの結果が保存されているとする  
field\_listは各ステップでの状態を記録した配列のリストとする

## アニメーションの作成

# 03-04. セルオートマトンの可視化 アニメーション

```
from matplotlib import animation, rc  
from IPython.display import HTML  
  
fig, ax = plt.subplots(dpi = 150);  
plt.close()  
  
artists = []  
  
for i in range(len(field_list)):  
    im = ax.matshow(field_list[i], interpolation='none', cmap="binary")  
  
    ax.set_aspect('equal')  
    artists.append([im])  
  
# アニメーションへの変換  
ani = animation.ArtistAnimation(fig, artists, interval=100)  
  
# アニメーションの表示 (JavaScriptとして埋め込み)  
rc('animation', html='jshtml')  
ani
```

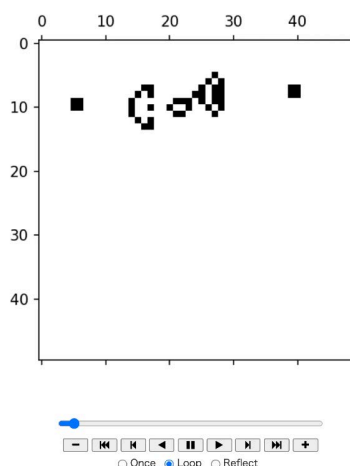
アニメーション作成に必要な  
モジュールのimport

各フレームを格納するリスト

アスペクト比の設定

フレームのリストへの格納

intervalで各フレームが表示される  
時間 (ms) を指定



28



# 本日の課題

ノーマル：  
1つ選ぶ

ハード：  
2つ以上

1. 1次元セル・オートマトンのクラス1, 2, 3, 4をそれぞれに相当する遷移ルールを見つけ出し, 示せ. また, どういった時に各クラスが出現するか考察せよ.
2. ライフゲームで固定物体, 振動子, 移動物体, 繁殖のパターンをそれぞれ探しだし, その遷移課程を示せ.
3. 1次元セル・オートマトン, ライフゲームのいずれかについて, どういった生物学的解釈が出来るか? 自分なりに考察せよ.
4. 質問, 意見, 要望等をどうぞ.

課題をノートブック (.ipynbファイル) にまとめて, Moodleにて提出すること  
ファイル名は[回数, 01~15]\_[難易度, ノーマル nかハード h].ipynb. 例. 10\_nh.ipynb <sup>31</sup>

## 次回予告

第11回：空間構造の数理モデル（2）：

パターン形成

6月20日

## 復習推奨

- モルフォゲン
- 反応拡散モデル
- 2次元配列