

数理生物学演習

第 1 2 回 疫学モデル

林玲奈 (Hayashi, Rena)

 rena.hayashi.route66@gmail.com

理学部生物学科4年

第5回：疫学モデル

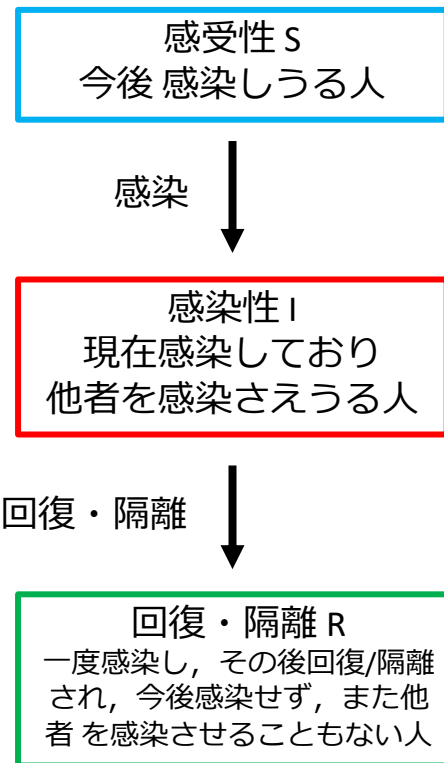
本日の目標

- SIRモデルの解析
- 基本再生産数
- ウイルス感染動態のモデルを知る

Kermack-McKendrickのSIRモデル

仮定

- 人々を感受性(susceptible, S), 感染性(infectious, I), 回復・隔離(recovered/removed, R)の3状態のいずれかにある
- 感染症は感染している人と未感染の人が接触したとき, ある確率でうつる
- 感染から回復すると免疫をもち, 再び感染することはない
- 移入・移出, 出生・死亡などによる“人口の増減”はない



$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

β : 伝達係数
 γ : 回復率・隔離率

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t)$$

“人口の増減なし”

$$N(t) = S(t) + R(t) + I(t) \text{ とすると } \frac{dN}{dt} = 0$$

基本再生産数

- 1 人の感染者が、感染期間中に再生産する 2 次感染者の期待値のこと
- 基本再生産数を r_0 とすれば、もし $r_0 > 1$ ならば感染症の流行が起こる

SIRモデルを仮定して、感染初期について基本再生産数を考えてみる

初期条件を $I(0) = I_0$, $S(0) = S_0$, $R(0) = R_0$ とする.
感染症が出現したごく初期において全人口のほとんどは感受性 s で占められているとすれば、感染性 i のダイナミクスは

$$\frac{dI}{dt} = (\beta S_0 - \gamma)I(t) \quad \text{となる。}$$

これを解くと

$$\underline{I(t) = I_0 e^{\lambda_0 t}} \quad \text{ただし } \lambda_0 = \beta S_0 - \gamma$$

よって $\lambda_0 > 0$ の場合に感染症の流行が起こる.

整理すると $\frac{\beta S_0}{\gamma} > 1$

つまり、この左辺が基本再生産数 r_0 $\underline{r_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}}$

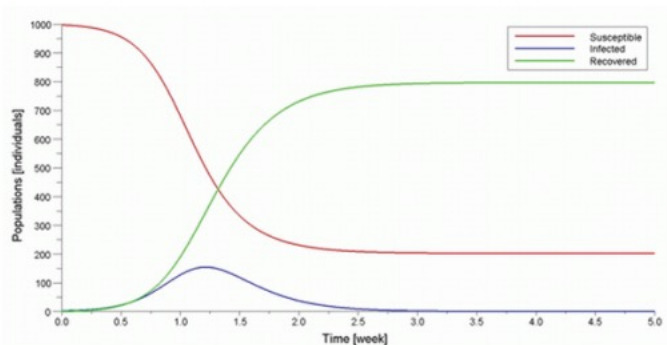
γ は回復・隔離率なので逆数 $T = \frac{1}{\gamma}$ (は回復・隔離までの期間の期待値になる.
これを使って書き直すと

$$r_0 = 1 + \lambda_0 T \quad \text{となる}$$

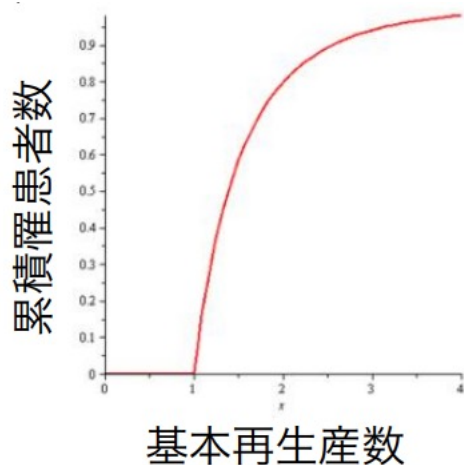
λ_0 と T は実際のデータから推定しやすいケースが多い.

最終規模方程式(final size equation)

感染症の流行が起きた場合でも全ての人が罹患するわけではなく、流行は自然に収束する



基本再生産数の関数として、累積罹患患者数 $R(\infty)$ を計算すると以下ようになる。



$(S(0), I(0), R(0)) = (S_0, 0, 0)$ として
最終規模 $z = \frac{R(\infty)}{S_0}$ と基本再生産数 R_0 の
関係を考える

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad I(t) = \frac{1}{\gamma} \frac{dR(t)}{dt}$$

代入して $\frac{dS}{dt} = -\beta S(t) \frac{1}{\gamma} \frac{dR(t)}{dt}$

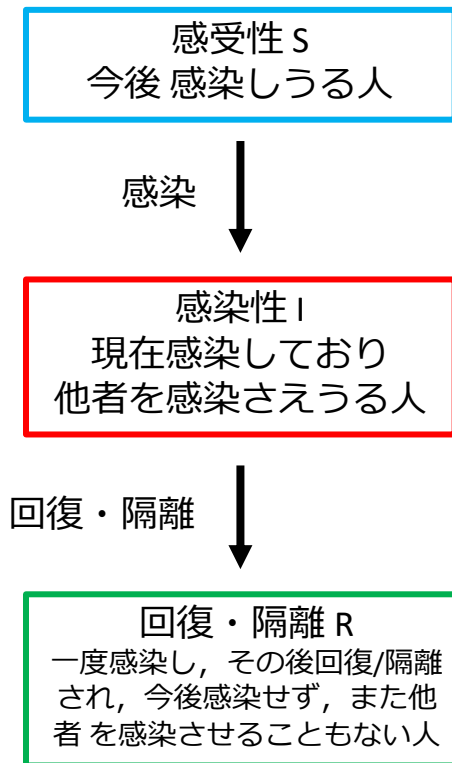
$$\frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta}{\gamma} \frac{dR(t)}{dt}$$

両辺を0から ∞ まで積分して

$$\ln(S(\infty)) - \ln(S(0)) = -\frac{\beta}{\gamma} (R(\infty) - R(0))$$

$$S(0) = S_0, R_0 = 0, S(\infty) = (1 - z)S_0, R(\infty) = zS_0, R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}$$

最終規模方程式 $1 - z = \exp(-zR_0)$



$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t)$$

β : 伝達係数
 γ : 回復率・隔離率

初期値
 $S(0) = S_0$
 $I(0) = I_0$
 $R(0) = R_0$

第4回の資料をもとに
オイラー法で離散化して
プログラムを組んでみよう.

オイラー法 Euler's method

- ・ 計算機は直接は微分や積分ができない
- ・ 微分方程式を（時間方向に）離散化し計算機が扱えるようにする

目的

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad \dots (1)$$

を数値的に解きたい。

微分の定義から

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

なので、 Δt が十分に小さければ、

(1) は近似的に

$$f(x, t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

変形すると

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + f(x, t)\Delta t$$

$x(0) = x_0$ とし、

$x_1 (= x(\Delta t)), x_2 (= x(2\Delta t)), \dots, x_n (= x(n\Delta t))$ を考えると

$$x_n \approx x_{n-1} + f(x_{n-1}, t_{n-1})\Delta t$$

ただし、 $t_n = \Delta t \cdot n$

ここで

$$X_n = X_{n-1} + f(X_{n-1}, t_{n-1})\Delta t$$

として、この X_n を x_n の近似値として採用する。

- ・ 時間方向の刻み幅 Δt を小さくすることである程度誤差を小さくできる
- ・ オイラー法はあまり精度の良い近似法ではない

最終的なプログラムは

前回の差分方程式と似たものになる

16

指数増殖の離散化

指数増殖

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

微分の近似 (Δt は十分小さいとする)

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$



$$ax(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

式を整理

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + ax(t)\Delta t$$



$x(0) = x_0$ とし, $x_1, x_2, \dots, x_n$
また, $t_n = \Delta t \cdot n$

$$x_{n+1} \approx x_n + ax_n\Delta t$$



$$X_{n+1} = X_n + aX_n\Delta t$$

susceptible, S についてオイラー法を用いて離散化

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

微分の近似 (Δ は十分小さいとする)

$$\frac{dS}{dt} \approx \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$



$$-\beta S(t)I(t) \approx \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

式を整理

$$S(t + \Delta t) \approx S(t) - \beta S(t)I(t)\Delta t$$



$x(0) = x_0$ とし, $x_1, x_2, \dots, x_n$

また, $t_n = \Delta t \cdot n$

$$S_{n+1} \approx S_n - \beta S_n I_n \Delta t$$

X_n を S_n , Y_n を I_n , Z_n を R_n の近似値とすると

$$X_{n+1} = X_n - \beta X_n Y_n \Delta t$$

$$Y_{n+1} = Y_n + (\beta X_n Y_n - \gamma Z_n) \Delta t$$

$$Z_{n+1} = Z_n - \gamma Z_n \Delta t$$

実際にプログラムを書いてみよう！

#12-01. モジュール・パッケージの読み込み

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
```

モジュールの読み込み

今回はplotするのでmatplotlibは必須

#12-02. 初期値設定

```
beta = 0.002
gamma = 1
x0 = 1000
y0 = 1
z0 = 0
r0 = beta*x0/gamma
print("基本再生産数は", r0, "です")
```

#時間幅の設定

```
dt = 0.01
t = 0
```

```
x = x0
y = y0
z = z0
```

```
tList = [t]
xList = [x]
yList = [y]
zList = [z]
```

初期値の設定

XがS YがI ZがR

としてコードは書いている。

#12-03. SIRモデル

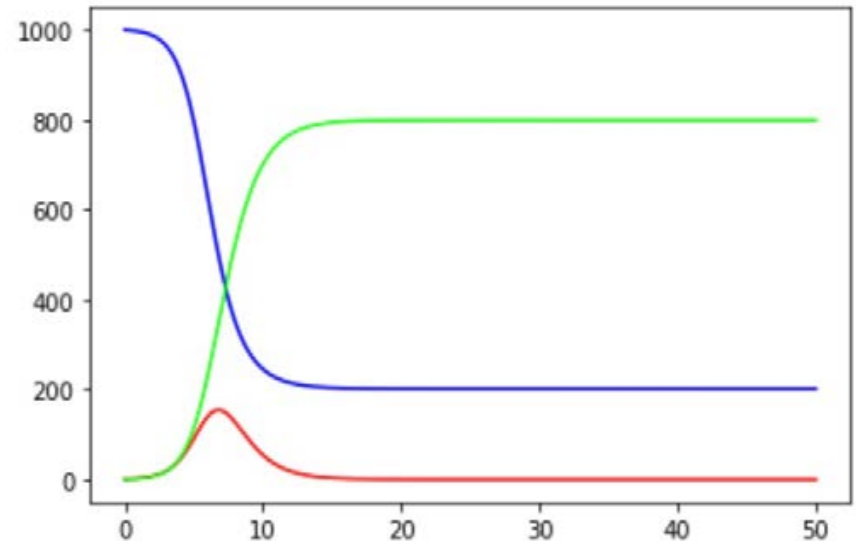
```
for i in range(5000):  
    t = dt*(i+1)  
    xx = x + dt*(-beta*x*y)  
    yy = y + dt*(beta*x*y-gamma*y)  
    zz = z + dt*(gamma*y)  
    x = xx  
    y=yy  
    z=zz  
    tList.append(t)  
    xList.append(x)  
    yList.append(y)  
    zList.append(z)
```

#12-04. plot

```
plt.plot(tList, xList,  
color="#0000ff")  
plt.plot(tList, yList,  
color="#ff0000")  
plt.plot(tList, zList,  
color="#00ff00")
```

SIRモデル

先程の離散化した式を使って
コードに実装する



#12-01. モジュール・パッケージの読み込み

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
```

#12-02. 初期値設定

```
beta = 0.002
gamma = 1
x0 = 1000
y0 = 1
z0 = 0
r0 = beta*x0/gamma
print("基本再生産数は", r0, "です")
```

#時間幅の設定

```
dt = 0.01
t = 0
```

```
x = x0
y = y0
z = z0
```

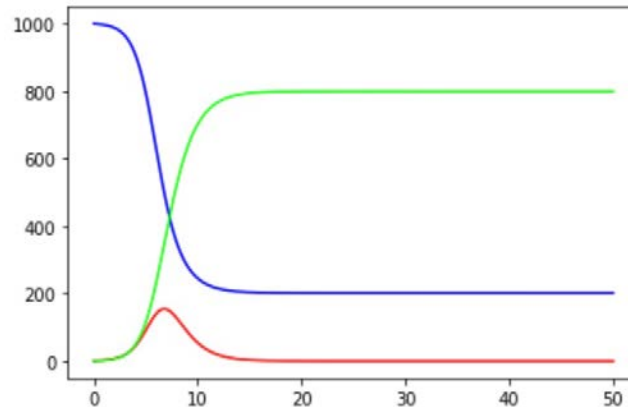
```
tList = [t]
xList = [x]
yList = [y]
zList = [z]
```

#12-03. SIRモデル

```
for i in range(5000):
    t = dt*(i+1)
    xx = x + dt*(-beta*x*y)
    yy = y + dt*(beta*x*y-gamma*y)
    zz = z + dt*(gamma*y)
    x = xx
    y=yy
    z=zz
    tList.append(t)
    xList.append(x)
    yList.append(y)
    zList.append(z)
```

#12-04. plot

```
plt.plot(tList, xList,
color="#0000ff")
plt.plot(tList, yList,
color="#ff0000")
plt.plot(tList, zList,
color="#00ff00")
```



14時50分まで休憩

本日の課題

1. 資料中のパラメータの値で、 $t > 4$ で β を半分に減らした時 と減らさないときのSIRモデルを重ねてプロットし、総罹患者数の減少率を計算せよ。
2. 介入の方法を変更し、総罹患者数の減少率を計算し、その介入の実際の意味を考察せよ。

ハード 3. $R_0 > 1$ の場合に解析的に導出される基本再生産数と、SIRモデルの数値計算から十分に時間が経った時の総罹患者数から導出される基本再生産数を比較する図を作成し、最終規模方程式が（ほぼ）正しいことを確かめよ。

4. 質問，意見，要望等をどうぞ。

課題をノートブック（.ipynbファイル）にまとめて、Moodleにて提出すること
ファイル名は[回数, 01~15]_[難易度, ノーマル nかハード h].ipynb. 例. 07_n.ipynb

本日の課題のヒント

1. 資料中の図を重ねてプロットします。十分時間が経った時の R (殒)を比較して、減少率を計算します。
2. 資料中では β を半分にしていますが、他のパラメータを変えるような介入や、介入する時間を変えて計算してみてください。
3. 最終規模方程式を R_0 について解くと、十分な時間が経った時の $R(t)$ ($=z$) から R_0 が計算できます。

研究の話

別のスライドへ