

第7回：理論形態モデル

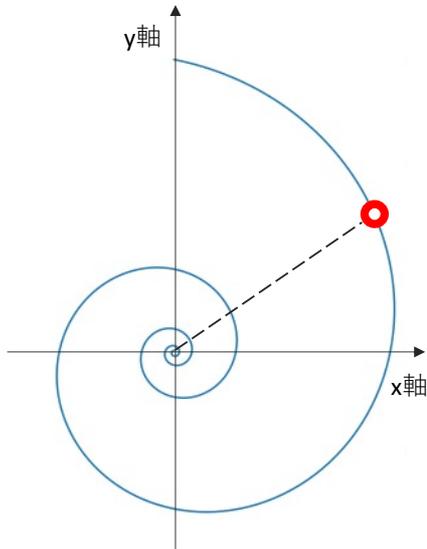
本日の目標

- Raupのモデル
- 回転行列
- 3Dプロット

対数らせんと可視化

対数らせん

$$\frac{dr}{d\theta} = a\theta \quad (a \text{は定数})$$



$$r(\theta) = r_0 e^{a\theta}$$

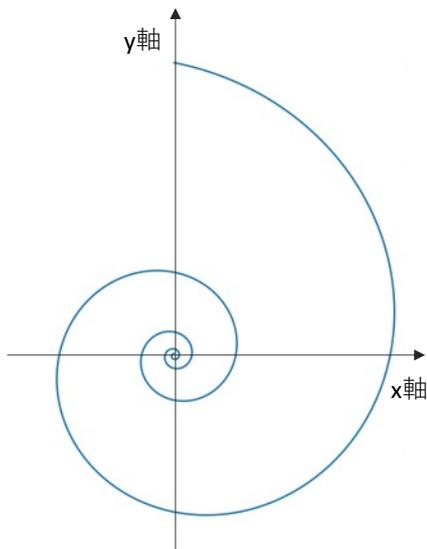
指数増殖モデル

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \begin{array}{l} \text{初期条件} \\ x(0) = x_0 \end{array}$$

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

対数らせん

$$\frac{dr}{d\theta} = a\theta \quad (a \text{は定数})$$



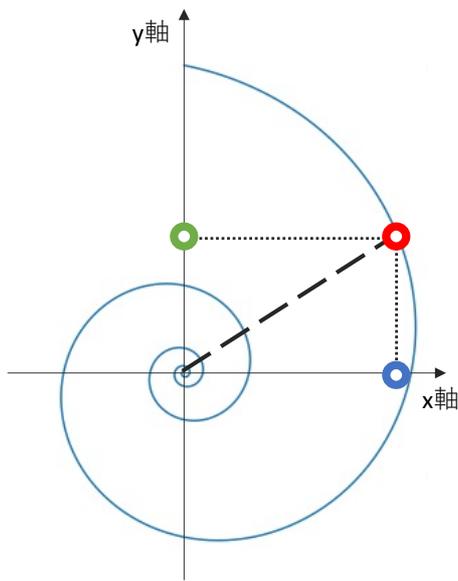
$$r(\theta) = r_0 e^{a\theta}$$

対数らせんで近似できる“巻き”パターン
オウムガイ



唐沢 與希 氏（三笠市立博物館）提供

対数らせん



$$r(\theta) = r_0 e^{a\theta}$$

#02-01. 対数らせん

```
import numpy as np
```

```
def logSpiral(a,r0,theta):
```

```
    """対数らせん
```

```
    対数らせんの座標値を返す関数
```

```
    Args:
```

```
        a : 対数らせんの拡大率
```

```
        r0 : 動径の初期値
```

```
        theta : 回転角
```

```
    Returns :
```

```
        x,y : 対数螺旋状の座標値
```

```
    """
```

```
    r=r0*np.exp(a*theta)
```

```
    x=r*np.cos(theta)
```

```
    y=r*np.sin(theta)
```

```
    return(x,y)
```

対数らせんのプロット

#02-02. 対数らせんのプロット

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
#パラメータの設定
```

```
r0=1
```

```
a=0.2
```

```
theta=np.linspace(0,8*np.pi,1000)
```

```
#座標値の計算
```

```
x,y=logSpiral(a,r0,theta)
```

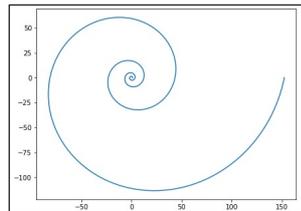
```
#プロット
```

```
plt.figure(figsize=(7,7))
```

```
plt.axes().set_aspect('equal')
```

```
plt.plot(x,y)
```

出力例



パラメータを変えてプロットしてみよう！

回転角 $\theta \sim 8\pi$ までプロット

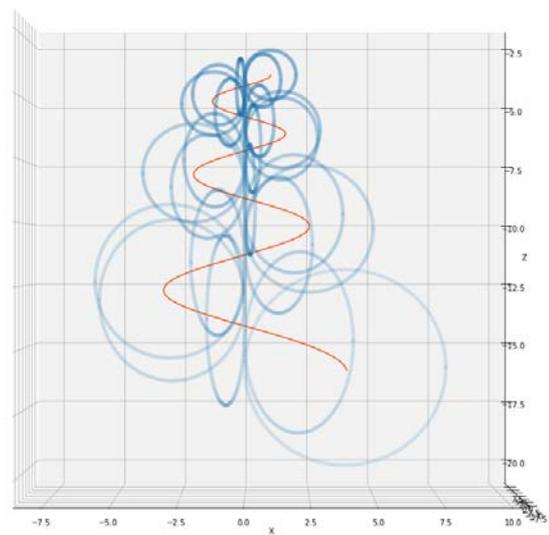
(さっき定義した) `logSpiral`関数を利用した計算, `x`, `y`にはそれぞれ座標値を記録したnumpy配列が代入される

`x`軸と`y`軸のスケールを同じにする

- `matplotlib.pyplot`
 - `axes()` `figure`環境に`axes`(座標値, 様々な作図関連の要素を格納する入れ物)を追加する.
 - `axes.Axes`
 - `set_aspect()` `axes`のアスペクト比(縦/横)を設定する. 自動('auto'), 同じ('equal'), あるいは具体的な値を指定できる.

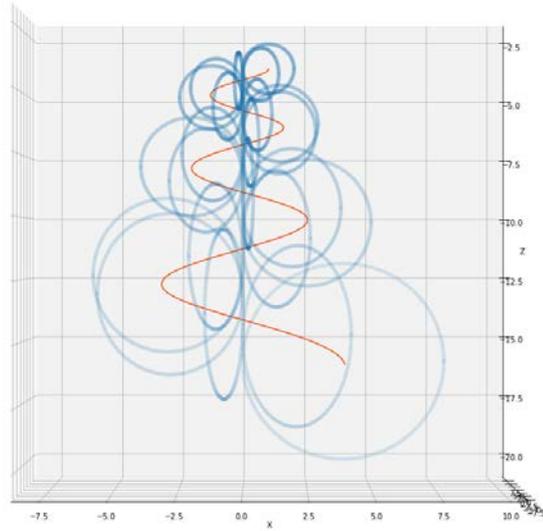
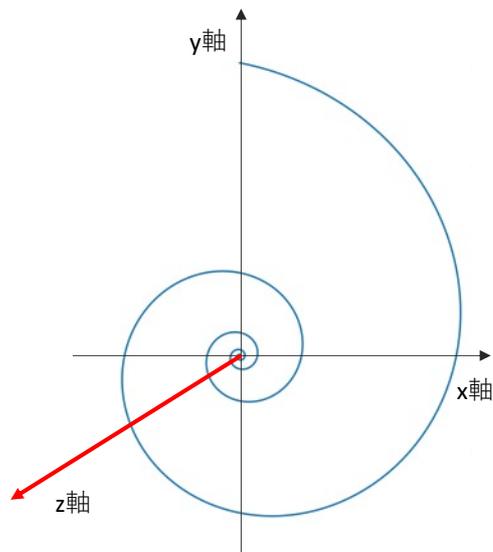
Raupのモデルと3Dプロット

Raupのモデル*



母曲線を巻き軸周りに回転させながら成長させることで
“巻き”のパターンを記述

Raupのモデル

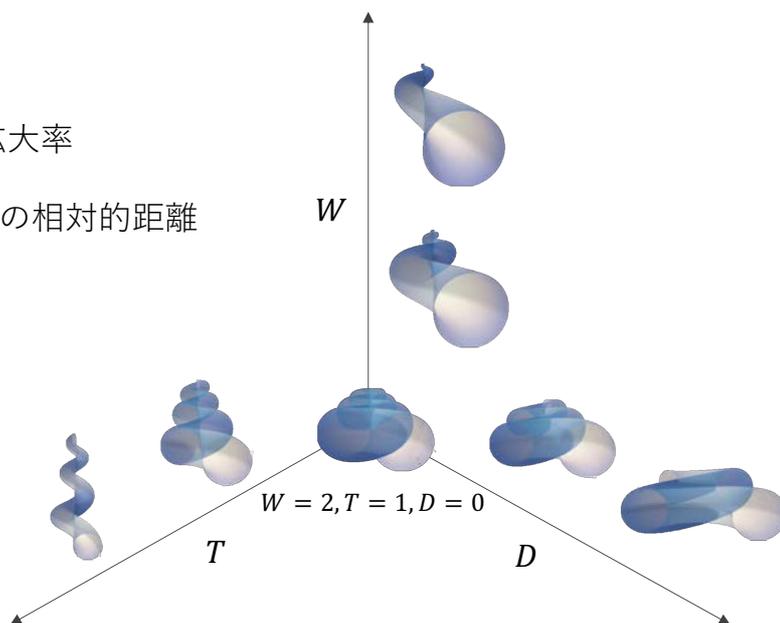


母曲線を巻き軸周りに回転させながら成長させることで
“巻き”のパターンを記述

Raupのモデル

パラメータを変えることで様々な巻パターンが表現できる

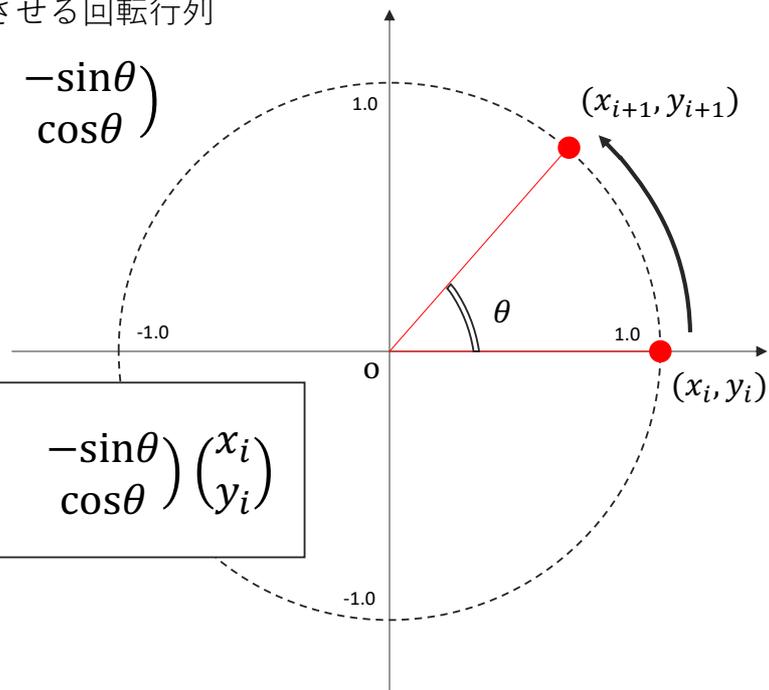
W : 螺環の拡大率
 T : 転移率
 D : 巻軸からの相対的距離



回転行列 2次元

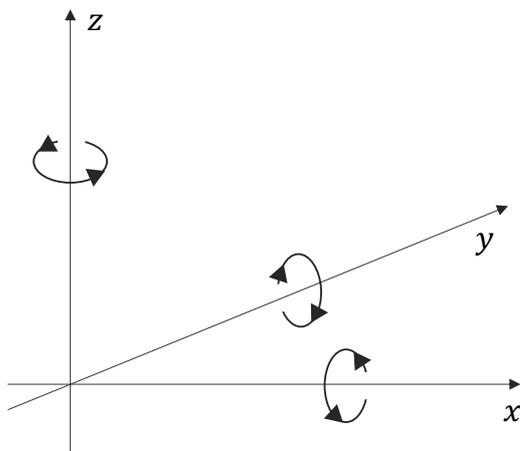
原点周りに θ だけ回転させる回転行列

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

回転行列 3次元



右ねじ

x軸周り

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y軸周り

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

z軸周り

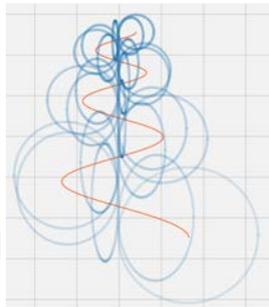
$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Raupのモデル

θ, ϕ でパラメータ表示された母曲線の軌跡(曲面)で巻貝の殻形態を近似する

$$r(\theta, \phi | W, T, D) = \underbrace{W \frac{\theta}{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{管の拡大}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi \\ 0 \\ \sin\phi \end{pmatrix}}_{\text{z軸周りの回転}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2D}{1-D} + 1 \\ 0 \\ 2T \left(\frac{D}{1-D} + 1 \right) \end{pmatrix}}_{\text{初期位置}}$$

ただし, $W > 1, T \in \mathbf{R}, -1 < D < 1$ とする



計算すると

$$= \begin{pmatrix} W \frac{\theta}{2\pi} \left(\frac{2D}{1-D} + 1 + \cos\phi \right) \cos\phi \\ W \frac{\theta}{2\pi} \left(\frac{2D}{1-D} + 1 + \cos\phi \right) \sin\phi \\ W \frac{\theta}{2\pi} \left(2T \left(\frac{D}{1-D} + 1 \right) + \sin\phi \right) \end{pmatrix}$$

これに基づきプロットする

Raupモデルの定義

#02-03. Raupのモデル

```
def raupModel(W, T, D, theta, phi):
```

"""Raupのモデル

Raupのモデルに基づき殻表面の座標 (x, y, z) を計算する.

Args:

W: 螺層拡大率

T: 転移率 (殻の高さ)

D: 巻軸からの相対的距離 (臍の大きさ)

theta: 成長に伴う回転角

phi: 殻口に沿った回転角

Returns:

x, y, z: 殻表面のx座標, y座標, z座標の
それぞれの座標値 (の配列)

"""

```
w = W**(theta/(2*np.pi))
```

```
x = w * (2*D/(1-D) + 1 + np.cos(phi))*np.cos(theta)
```

```
y = -w * (2*D/(1-D) + 1 + np.cos(phi))*np.sin(theta)
```

```
z = -w * (2*T*(D/(1-D) + 1) + np.sin(phi))
```

```
return (x, y, z)
```

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

プロット時に見やすく
するためにx軸周りで
180° 回転させている

Raupモデルのプロット

#02-04. Raupのモデルのプロット

```
import plotly.graph_objs as go
```

3次元プロットのためにプロット用パッケージ (plotly) のgraph_objsをgoという略称でインポート

```
#Raupのモデルに基づく殻の表面座標の計算
```

より詳しく知りたい人は公式ドキュメント
参照 Plotly <https://plotly.com/python/>

```
W=10**0.2
```

```
T=1
```

```
D=0.2
```

```
thetaRange = np.linspace(0,8*np.pi, 3600 )
```

```
phiRange= np.linspace(0, 2*np.pi, 90)
```

```
theta, phi = np.meshgrid(thetaRange, phiRange)
```

numpy

- meshgrid(array1d_1,array1d_2)
一次元配array1d_1,array1d_2に従い、それらのなす格子点の (座標ごとの) 配列のリストを生成する。

```
x,y,z = raupModel(W,T,D,theta, phi)
```

3次元プロットのための殻両面の
3次元座標値を計算

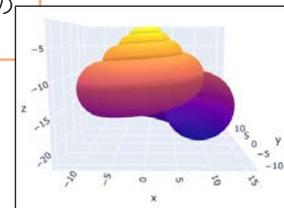
```
fig=go.Figure(go.Surface(x=x,y=y,z=z,showscale=False))
```

入力した点に張られる表面を作成

```
fig.update_layout(scene={"aspectmode":"data"})
```

プロット時に各軸の
スケールを揃える

```
fig.show()
```



meshgridの補足

```
#meshgrid
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import numpy as np
```

```
a=np.linspace(0,1,3)
```

```
b=np.linspace(2,3,6)
```

```
mesh=np.meshgrid(a,b)
```

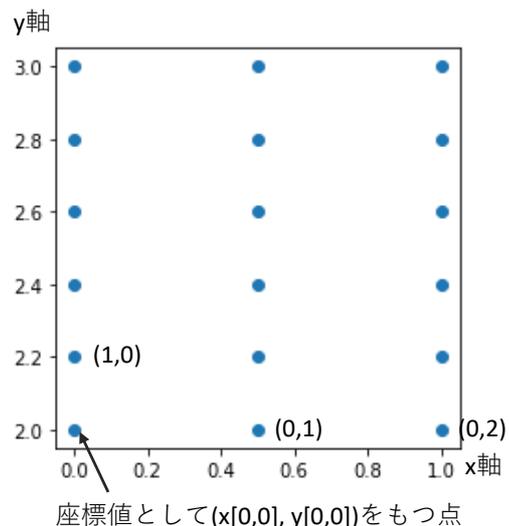
```
x,y=np.meshgrid(a,b)
```

```
print(mesh)
```

```
plt.axes().set_aspect("equal")
```

```
plt.scatter(x,y)
```

```
#出力
[array([[0. , 0.5, 1. ],
        [0. , 0.5, 1. ],
        [0. , 0.5, 1. ],
        [0. , 0.5, 1. ],
        [0. , 0.5, 1. ],
        [0. , 0.5, 1. ]]),
 array([[2. , 2. , 2. ],
        [2.2, 2.2, 2.2],
        [2.4, 2.4, 2.4],
        [2.6, 2.6, 2.6],
        [2.8, 2.8, 2.8],
        [3. , 3. , 3. ]])]
```



座標値として(x[0,0], y[0,0])をもつ点

- plt.scatter(X,Y) : 配列 (やリスト)
XとYを座標値とした散布図を描く

n(>2)個の配列からなる格子点の生成にも利用可能

本日の課題 ノーマル

1. Raupモデルのパラメータを変化させて、様々な“かたち”を描け（4つ程度）
- 選択 2. 1. で描いた“かたち”を巻貝の形態的なモデルとしよう。すると様々なかたちの中には現実の巻貝に存在する“かたち”と、現実には存在しない“かたち”が現れる。ではなぜ現実にはそうした“かたち”の巻貝が存在するのか、または存在しないのか、その要因について意見を述べよ。
- 選択 3. 現実の巻貝にはRaupモデルによって描けない“かたち”が存在する。そうした巻貝を探し出し、なぜRaupモデルでは描けないのかを考察せよ
4. 質問、意見、要望等をどうぞ。

課題をノートブック（.ipynbファイル）にまとめて、Moodleにて提出すること
ファイル名は[回数, 01~15]_[難易度, ノーマルnかハードh].ipynb. (例) 07_h.ipynb

本日の課題 ハード

ノーマル課題2, 3のうち、ノーマルで選択しなかった方に取り組む

2. (ノーマルの) 1. で描いた“かたち”を巻貝の形態的なモデルとしよう。すると様々なかたちの中には現実の巻貝に存在する“かたち”と、現実には存在しない“かたち”が現れる。ではなぜ現実にはそうした“かたち”の巻貝が存在するのか、または存在しないのか、その要因について意見を述べよ。
3. 現実の巻貝にはRaupモデルによって描けない“かたち”が存在する。そうした巻貝を探し出し、なぜRaupモデルでは描けないのかを考察せよ

課題をノートブック（.ipynbファイル）にまとめて、Moodleにて提出すること
ファイル名は[回数, 01~15]_[難易度, ノーマルnかハードh].ipynb. (例) 07_h.ipynb

次回予告
第8回：研究を始めるために
6月7日

研究内容
別のスライドへ