数理生物学演習

第8回　疫学モデル

岩波翔也（Iwanami, Shoya）
🏠 https://shoyaiwanami.com
システム生命科学府 数理生物学研究室
資料は https://koji.noshita.net

第8回：疫学モデル

本日の目標

- SIRモデルの解析
- 基本再生産数
- ウイルス感染動態のモデルを知る

Kermack-McKendricのSIRモデル

仮定

- 人々を感受性(susceptible, S)，感染性(infectious, I)，回復・隔離(recovered/removed, R)の３状態のいずれかにある
- 感染症は感染している人と未感染の人が接触したとき，ある確率でうつる
- 感染から回復すると免疫をもち，再び感染することはない
- 移入・移出，出生・死亡などによる“人口の増減”はない

感受性 S
今後 感染しうる人

↓ **感染**

感染性 I
現在感染しており，
他者を感染させうる人

↓ **回復・隔離**

回復・隔離 R
一度感染し，その後回復/隔離され，今後感染せず，また他者を感染させることもない人

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\
\dfrac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\
\dfrac{dR}{dt} = \gamma I(t)
\end{cases}
$$

β: 伝達係数
γ: 回復率・隔離率

“人口の増減なし”

$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$　とすると　$\dfrac{dN}{dt} = 0$

基本再生産数

- １人の感染者が，感染期間中に再生産する２次感染者の期待値のこと
- 基本再生産数を r_0 とすれば，もし $r_0>1$ ならば感染症の流行が起こる

SIRモデルを仮定して，感染初期について基本再生産数を考えてみる

初期条件を　$I(0)=I_0, S(0)=S_0, R(0)=R_0$ とする．感染症が出現したごく初期において全人口のほとんどは感受性Sで占められているとすれば，感染性Iのダイナミクスは

$$\frac{dI}{dt} = (\beta S_0 - \gamma)I(t)$$

となる．

これを解くと

$$I(t) = I_0 e^{\lambda_0 t}$$

ただし，$\lambda_0 = \beta S_0 - \gamma$

よって，$\lambda_0 > 0$ の場合に感染症の流行が起こる．

整理すると　$\dfrac{\beta S_0}{\gamma} > 1$

つまり，この左辺が基本再生産数 r_0．

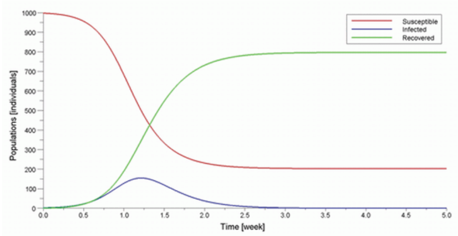
別の表現もできる．例えば，γは回復・隔離率なので逆数$T=1/\gamma$は回復・隔離までの期間の期待値になる．これを使って書き直すと

となる．$r_0 = 1 + \lambda_0 T$

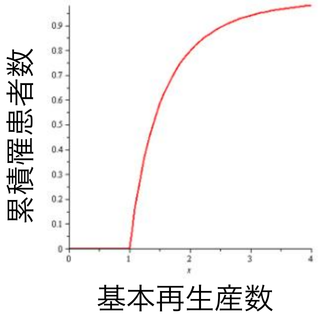
λ_0とTは実際のデータから推定しやすいケースが多いので，便利かも知れない．

最終規模方程式（final size equation）

感染症の流行が起きた場合でも全ての人が罹患するるわけではなく、流行は自然に収束する



基本再生産数の関数として、累積罹患者数$R(\infty)$を計算すると以下のようになる。



$(S(0), I(0), R(0)) = (S_0, 0, 0)$として

最終規模 $z = \frac{R(\infty)}{S_0}$ と基本再生産数 r_0 の関係を考える

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t) I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases} \longrightarrow I(t) = \frac{1}{\gamma}\frac{dR(t)}{dt}$$

代入して

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t) \frac{1}{\gamma}\frac{dR(t)}{dt}$$

$$\frac{1}{S(t)}\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta}{\gamma}\frac{dR(t)}{dt}$$

両辺を0から∞まで積分して

$$\ln(S(\infty)) - \ln(S(0)) = -\frac{\beta}{\gamma}(R(\infty) - R(0))$$

$S(0) = S_0, R(0) = 0, S(\infty) = (1-z)S_0, R(\infty) = zS_0, \frac{\beta S_0}{\gamma} = r_0$ とすると

最終規模方程式 $1 - z = \exp(-zr_0)$

実際にプログラムを組んでみよう！

感受性 S
今後 感染しうる人

↓ **感染**

感染性 I
現在感染しており，
他者を感染させうる人

↓ **回復・隔離**

回復・隔離 R
一度感染し，その後回復/隔離
され，今後感染せず，また他者
を感染させることもない人

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\
\dfrac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\
\dfrac{dR}{dt} = \gamma I(t)
\end{cases}
$$

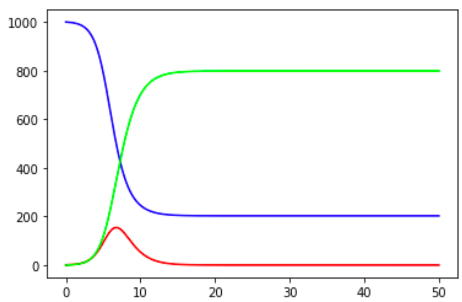
β: 伝達係数
γ: 回復率・隔離率

初期値
$I(0)=I_0$
$S(0)=S_0$
$R(0)=R_0$

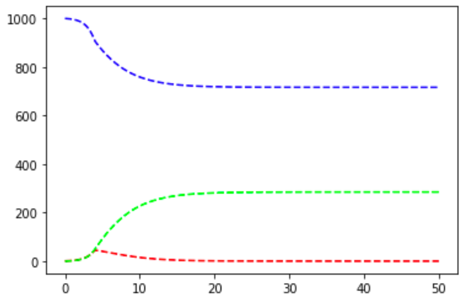
**第3回・第4回の資料をもとに
オイラー法で離散化して，
プログラムを組んでみよう．**

完成したら，パラメータを様々に変化させて
モデルの挙動を見てみましょう．

```
# SIRモデル
beta = 0.002
gamma = 1
x0 = 1000
y0 = 1
z0 = 0

r0 = beta*x0/gamma
print("基本再生産数は",r0,"です")

dt = 0.01
t= 0
x = x0
y = y0
z = z0
xList = [x]
yList = [y]
zList = [z]
tList = [t]

for i in range(5000):
    t = dt*(i+1)
    xx = x + dt*(-beta*x*y)
    yy = y + dt*(beta*x*y-
gamma*y)
    zz = z + dt*(gamma*y)
    x = xx
    y=yy
    z=zz
    tList.append(t)
    xList.append(x)
    yList.append(y)
    zList.append(z)
plt.plot(tList, xList,
color="#0000ff")
plt.plot(tList, yList,
color="#ff0000")
plt.plot(tList, zList,
color="#00ff00")
```



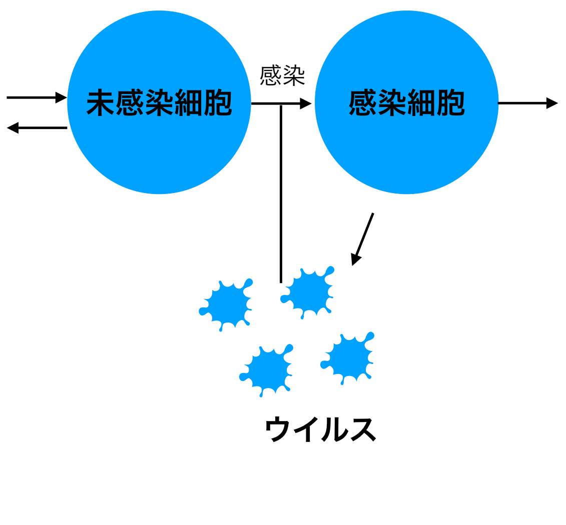
```
# 流行を抑えるための介入
beta = 0.002
gamma = 1
x0 = 1000
y0 = 1
z0 = 0

r0 = beta*x0/gamma
print("基本再生産数は",r0,"です")


dt = 0.01
t= 0
x = x0
y = y0
z = z0
xList = [x]
yList = [y]
zList = [z]
tList = [t]

for i in range(5000):
    t = dt*(i+1)
    if t > 4:
      beta = 0.002*0.5
    xx = x + dt*(-beta*x*y)
    yy = y + dt*(beta*x*y-
gamma*y)
    zz = z + dt*(gamma*y)
    x = xx
    y=yy
    z=zz
    tList.append(t)
    xList.append(x)
    yList.append(y)
    zList.append(z)
plt.plot(tList, xList,
color="#0000ff")
plt.plot(tList, yList,
color="#ff0000")
plt.plot(tList, zList,
color="#00ff00")
```



休憩

研究の話

ウイルス感染の数理モデル



$$\begin{cases} \dfrac{dT(t)}{dt} = \lambda - \beta T(t)V(t) - dT(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = \beta T(t)V(t) - \delta I(t) \\ \dfrac{dV(t)}{dt} = \rho I(t) - rV(t) \end{cases}$$

T(t): 未感染細胞数
I(t): 感染細胞数
V(t): ウイルス量

別スライドへ

本日の課題

1. 資料中のパラメータの値で、t > 4でβを半分に減らした時と減らさないときのSIRモデルを重ねてプロットし、総罹患者数の減少率を計算せよ。
2. 【緩め】介入の方法を変更し、総罹患者数の減少率を計算し、その介入の実際の意味を考察せよ。
3. ハード $R_0>1$の場合に解析的に導出される基本再生産数と，SIRモデルの数値計算から十分に時間が経った時の総罹患者数から導出される基本再生産数を比較する図を作成し、最終規模方程式が（ほぼ）正しいことを確かめよ.
4. 質問，意見，要望等をどうぞ.

課題をノートブック（.ipynbファイル）にまとめて，Moodleにて提出すること
ファイル名は[回数，01~15]_[難易度，ノーマル nかハード h].ipynb．例．07_n.ipynb

本日の課題のヒント

1. 資料中の図を重ねてプロットします。十分時間が経った時のR(∞)を比較して、減少率を計算します。
2. 資料中ではβを半分にしていますが、他のパラメータを変えるような介入や、介入する時間を変えて計算してみてください。
3. 最終規模方程式をR_0について解くと、十分な時間が経った時のR(t)（=z）からR_0が計算できます。

次回予告

第９回

７月６日