発展

数理生物学演習

第３回　個体群動態の数理モデル（１）：離散ロジスティック成長モデル

野下 浩司（Noshita, Koji）

noshita@morphometrics.jp

https://koji.noshita.net

理学研究院 数理生物学研究室

分岐図 bifurcation diagram

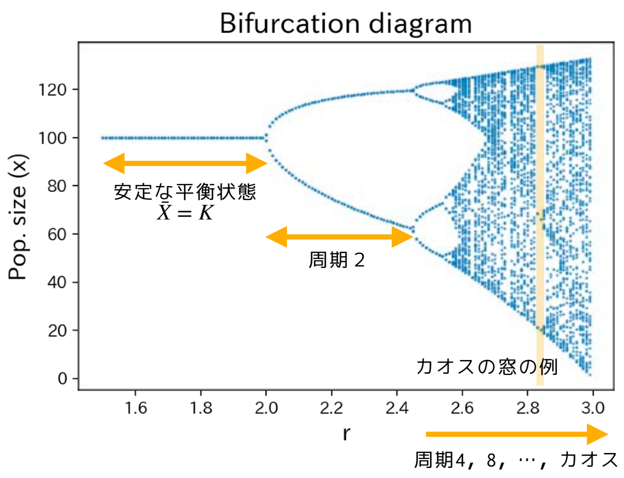
ロジスティック成長モデル

$$X_{t+1} = X_t + r\left(1 - \frac{X_t}{K}\right)X_t$$

r：内的自然増加率．個体数が十分小さい場合（$X \approx 0$）の１世代あたりの増殖率．$r \geq 0$.

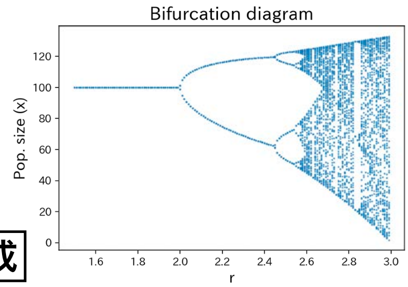
K：環境収容力．ある環境で維持されうる個体数，$K > 0$.

- 内的自然増加率（r）が大きくなると平衡状態が不安定になる．
- $r > 2$で周期２の安定な振動を観察できる．さらにrが大きくなると，周期４，８，…と分岐する．
- その後，カオス軌道が観察される．時折，カオス軌道から特定の周期に変わるカオスの窓と呼ばれる空白地帯が出現する．



プログラムの流れ
分岐図

課題 ハード 1



最終的にこんなのをプロットしたい

必要なパッケージ（matplotlib）の読み込み

↓

パラメータ（K）の定義

↓

パラメータrと個体数xのリスト（r_list, x_list）を作成

↓

forループ

初期値（x0）・パラメータ（r）の設定 1.5≦r≦3の範囲

forループ

t=0からt<1000まで

差分方程式

$$X_{t+1} = X_t + r\left(1 - \frac{X_t}{K}\right)X_t$$

を使い，t+1ステップ目を計算する.

```
x = x+r*(1-x/K)*x
```

最後の100ステップをリスト（r_list, x_list）に追加

→ **プロット**

ニュートン法 Newton’s method（1）

方程式を解くためのアルゴリズム

解を求めたい方程式を $f(x) = 0$ とすれば，解は $f(x)$ とx軸との交点になる.

では，どうやって「数値的に」求めるか？

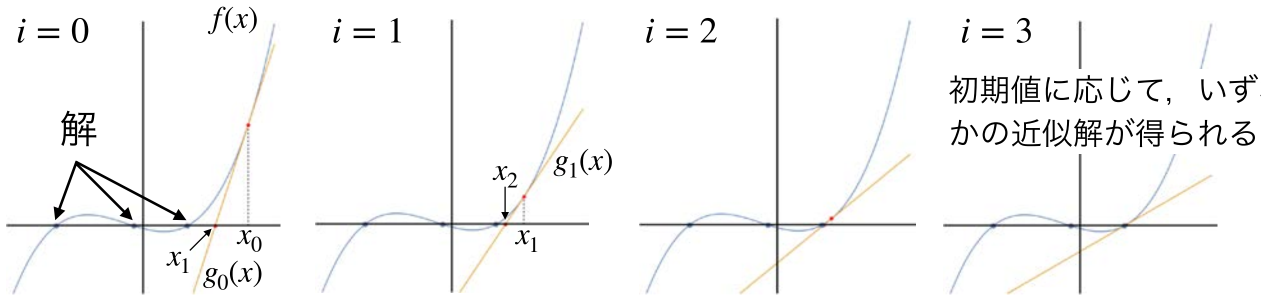
方針

1. 解の近似値をx_iとし，適当なその初期値 x_0を決める
2. 解の近似値 x_iでの接線 $g(x)$ を求める
3. この接線$g(x)$とx軸との交点（$g(x) = 0$を満たすx）を求める
4. 交点のx座標を新たに近似値 x_{i+1} として採用する

・以後，近似値が収束するまで2.〜4.を繰り返す.

$g(x)$は$f(x)$を用いて表現可
$g(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$

$g(x) = 0$を満たすxをx_{i+1}とする
$f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$,
なので，
整理すると$x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$



ニュートン法 Newton’s method（２）

ロジスティック成長モデル

$$X_{t+1} = X_t + r\left(1 - \frac{X_t}{K}\right)X_t$$

r：内的自然増加率．個体数が十分小さい場合（$X \approx 0$）の１世代あたりの増殖率．$r \geq 0$.

K：環境収容力．ある環境で維持されうる個体数，$K > 0$.

このモデルの平衡点（$r\left(1 - \frac{\bar{X}}{K}\right)\bar{X} = 0$を満たす$\bar{X}$）を数値的に求めたい．

考えること

- ロジスティック成長モデルにおけるニュートン法で用いる漸化式 $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$は具体的にはどのような形になるか？
- どのようなループを組めばよいか？

いろいろな初期値からスタートして，両方の平衡点を求めてみよう．

第３回 課題 ハード

1. 離散ロジスティックモデルの分岐図を描け．
2. ニュートン法を用いて，離散ロジスティックモデルの平衡点を数値的に求める関数を定義し，利用せよ．

課題をノートブック（.ipynbファイル）にまとめて，Moodleにて提出すること

ファイル名は[回数，01~15]_[難易度，ノーマル nかハード h].ipynb．例．03_h.ipynb